<u>ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ</u>

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ Ι

1. Αποδείξτε ότι για κάθε $r > 0$ το σύνολο

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = r^2\}$$

είναι κανονική επιφάνεια. Βρείτε σύστημα συντεταγμένων γύρω από κάθε σημείο της.

2. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία και τις κρίσιμες τιμές της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2.$$

Για ποιές τιμές της σταθεράς $c \in \mathbb{R}$ είναι το σύνολο $f^{-1}(c)$ κανονική επιφάνεια; Να εξετάστε τα ίδια ερωτήματα στην περίπτωση όπου $f(x, y, z) = x^2yz$.

3. Αποδείξτε ότι το ελλειψοειδές

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\},$$

όπου a, b, c είναι θετικοί αριθμοί, είναι κανονική επιφάνεια. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $X : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ με

$$(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u), \quad (u, v) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$$

σύστημα συντεταγμένων της S. Περιγράφτε γεωμετρικά τις καμπύλες u=σταθ. της S.

4. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$$

είναι κανονική επιφάνεια και βρείτε ένα σύστημα συντεταγμένων της.

5. Είναι η απεικόνιση $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με

$$(u, v) = (v \sin u, v \cos u, u), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

κανονική παραμετρική επιφάνεια;

6. Έστω καμπύλη $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$ καμπυλότητα $k(s) > 0$ για κάθε $s \in I$ και κύριο κάθετο $\vec{n}(s)$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$X(s, v) = c(s) + v\vec{n}(s), \quad (s, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

Είναι η X κανονική παραμετρική επιφάνεια;

7. Αποδείξτε ότι όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα της επιφάνειας με εξίσωση $z = xf(y/x), x \neq 0$, όπου f είναι λεία συνάρτηση, διέρχονται από το σημείο $O = (0, 0, 0)$.

8. Έστω καμπύλη $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$, καμπυλότητα $k(s) > 0$ για κάθε $s \in I$ και πλαίσιο Frenet $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$X(s, v) = c(s) + r(\cos v\, \vec{n}(s) + \sin v\, \vec{b}(s)), \quad (s, v) \in I \times \mathbb{R},$$

όπου $r > 0$. Αποδείξτε ότι η X είναι κανονική παραμετρική επιφάνεια και ότι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό της πεδίο είναι

$$N(s, v) = -(\cos v\, \vec{n}(s) + \sin v\, \vec{b}(s)).$$